

Matematică $M_{tehnologic}$

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Calculați suma primilor patru termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, în care $a_1 = 2$ și $a_4 = 11$.
- 5p** 2. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x - 4$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x+2} - 2 = 0$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie format doar din cifre pare.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,5)$ și $B(3,1)$. Determinați coordonatele simetricului punctului A față de punctul B .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 8$, $AC = 6$ și $BC = 10$. Calculați $\cos B$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p** a) Arătați că $\det(A + I_3) = 4$.
- 5p** b) Demonstrați că $A \cdot A \cdot A + A = 2A \cdot A$.
- 5p** c) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care matricea $B(x) = A + xI_3$ este inversabilă.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x + ay + 1$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $2020 * 0 = 2021$, pentru orice număr real a .
- 5p** b) Determinați numărul real a , știind că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă.
- 5p** c) Pentru $a = -1$, determinați numărul real x pentru care $4^x * 2^x = 1$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x-2}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$, $x \in (2, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $x = 3$, situat pe graficul funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că funcția f' este crescătoare pe $(2, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_1^e \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{f(x)} dx = 1$.
- 5p** b) Calculați $\int_1^2 f^2(x) dx$.
- 5p** c) Demonstrați că $\int_0^{2020} f(x) dx \leq \int_0^a f(x) dx$, pentru orice $a \in [2020, +\infty)$.