FORMULE BACALAUREAT

NUMERE REALE

Reguli de calcul cu numere reale vizând:

- asociativitatea: $a+(b+c)=(a+b)+c$; $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$, oricare ar fi $a,b,c\in\mathbb{R}$
- comutativitatea: $a+b=b+a$; $a\cdot b=b\cdot a$, oricare ar fi $a,b\in\mathbb{R}$
- elementul neutru: $a+0=0+a=a$; $a\cdot 1=1\cdot a=a$, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$
- elemente simetrizabile: $a+(-a)=(-a)+a=0$, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$; $a\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\cdot a=1$, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$
- distributivitatea: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$, oricare ar fi $a,b,c\in\mathbb{R}$
- alte proprietăți: $a\cdot 0=0\cdot a=0$, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$.

Modulul unui număr real x : $|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}$; proprietăți: $|x|\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$; $|x|=0 \Leftrightarrow x=0$; $|-x|=|x|, \forall x\in\mathbb{R}$; $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$, $|x+y|\geq|x|+|y|$; $|x|=|y| \Rightarrow x=y$ sau $x=-y$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

Media aritmetică a numerelor reale $a_1,a_2,...,a_n$ este $m_a=\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$.

Media artimetică ponderată a numerelor reale $a_1,a_2,...,a_n$, care au respectiv ponderile $p_1,p_2,...,p_n$, este $m_{ap}=\frac{a_1p_1+a_2p_2+...+a_np_n}{p_1+p_2+...+p_n}$.

Media geometrică a două numere reale pozitive a şi b este $m_g=\sqrt{a\cdot b}$.

Media armonică a două numere reale pozitive nenule a, b este $m_h=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

Inegalitatea mediilor: $\min\{a;b\}\leq\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leq\sqrt{a\cdot b}\leq\frac{a+b}{2}\leq\max\{a;b\}$, unde a şi b sunt numere reale pozitive nenule

PUTERI SI RADICALI

$a^0=1, a\in\mathbb{R}^*$

$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{\text{de n ori}}, a\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}^*$

$a^m a^n=a^{m+n}$

$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

$\frac{1}{a^n}=a^{-n}$

$\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}, a\geq 0$

$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}, \begin{cases} a\geq 0 \text{ pentru n număr natural par}\\ a\in\mathbb{R} \text{ pentru n număr natural impar}\end{cases}, n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2$

$a^0 = 1, a \in \mathbb{R}^*$

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{de n ori}}, a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$

$a^m a^n = a^{m+n}$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}, a \geq 0$

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \begin{cases} a \geq 0 \text{ pentru n număr natural par} \\ a \in \mathbb{R} \text{ pentru n număr natural impar} \end{cases}, n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$

LOGARITMI

Logaritmi: condiții de existență pentru $\log_a x$: $a > 0, a \neq 1, x > 0$; definiție: $\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y$

Proprietățile logaritmilor

$\log_a 1 = 0$	Ex. $\log_2 1 = 0$
$\log_a a = 1$	Ex. $\log_5 5 = 1$
$\log_a a^n = n$	Ex. $\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$
$\ln 1 = 0$	
$\ln e = 1$	
$\lg 10 = 1$	
$\lg 1 = 0$	
$\log_a x^n = n \log_a x$	Ex. $\log_2 5^3 = 3 \log_2 5$
$\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x$	Ex. $\log_8 5 = \log_{2^3} 5 = \frac{1}{3} \log_2 5$
$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$	Ex. $\log_8 3 = \frac{1}{\log_3 8}$
$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ sau $\log_a x = \frac{\lg x}{\lg a}$ sau $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$	Ex. $\log_3 4 = \frac{\ln 4}{\ln 3}$
$\log_a x + \log_a y = \log_a xy$	Ex. $\log_2 6 + \log_2 \frac{4}{3} = \log_2 6 \frac{4}{3} = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$
$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$	Ex. $\log_2 6 - \log_2 3 = \log_2 \frac{6}{3} = \log_2 2 = 1$
$a^{\log_a x} = x$	Ex. $5^{\log_5 7} = 7$

PROGRESII ARITMETICE SI GEOMETRICE

Notații: fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$; $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *şir de numere reale* cu termenii a_1 (primul termen, termenul de rang 1), a_2 (al doilea termen, termenul de rang 2), ..., a_n (termenul general) , ...; suma primilor n termeni ai şirului: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... a_n$.

Şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este o *progresie aritmetică* de rație $r \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n + r$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ (recurență);

$a_n = a_1 + (n-1)r$; $a_n = \dfrac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$; $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}$.

Şirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este o *progresie geometrică* de rație q nenulă $\Leftrightarrow b_{n+1} = b_n \cdot q$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ (recurență);

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$; $b_n^2 = b_{n+1} \cdot b_{n-1}$; $S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$ pentru $q \neq 1$.

Funcţia de gradul întâi

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

Dacă $a > 0$, atunci f este strict crescătoare.
Dacă $a < 0$, atunci f este strict descrescătoare.
Intersecţia graficului f cu axa 0x $\leftrightarrow f(x) = 0 \leftrightarrow ax + b = 0 \leftrightarrow x = -\frac{b}{a} \leftrightarrow$ punctul $A(-\frac{b}{a}, 0)$
Intersecţia graficului f cu axa 0y $\leftrightarrow x = 0$ şi $y = f(0) \leftrightarrow$ punctul $B(0, b)$

Funcţia de gradul al doilea

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a,b,c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

Ecuaţia $f(x) = 0$ are rădăcinile $x_1,x_2 = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \in \mathbb{R}$, dacă $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$

Vârful parabolei are coordonatele $V(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$.

Axa de simetrie este dreapta de ecuaţie $x = -\frac{b}{2a}$.

$\min f/\max f = -\frac{\Delta}{4a}$

imaginea funcţiei/mulţimea valorilor funcţiei $\begin{cases} \mathrm{Im} f = [-\frac{\Delta}{4a}, \infty), \text{dacă } a > 0 \\ \mathrm{Im} f = (-\infty, -\frac{\Delta}{4a}], \text{dacă } a < 0 \end{cases}$

forma canonică $f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a}$

Relaţiile lui Viète $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$, unde x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $ax^2 + bx + c = 0$

$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$
$x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3PS$
$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2) = a(x^2 - Sx + P)$

Intersecţia graficului f cu axa Ox $\leftrightarrow f(x) = 0 \leftrightarrow \begin{cases} \text{punctele } A_1(x_1,0), A_2(x_2,0), \text{dacă } \Delta > 0 \\ \text{punctul } A\left(-\frac{b}{2a}, 0\right), \text{ dacă } \Delta = 0 \\ \nexists, \text{ dacă } \Delta < 0 \end{cases}$

Intersecţia graficului f cu axa Oy $\leftrightarrow x = 0$ şi $y = f(0) \leftrightarrow$ punctul $B(0, c)$

$f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \iff a > 0, \Delta < 0$
$f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \iff a > 0, \Delta \leq 0$
$f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \iff a < 0, \Delta < 0$

Semnul funcţiei de gradul al doilea

x	dacă		$-\infty$		x_1		x_2		∞
$ax^2 + bx + c$	$\Delta>0$	$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$	semnul lui a		0	semn contrar lui a	0	semnul lui a	
	$\Delta=0$	$x_1 = x_2 \in \mathbb{R}$	semnul lui		0	semnul lui a			
	$\Delta<0$	$x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$				semnul lui a			

Ex.

x	$-\infty$			-3			-1			∞
$x^2 + 4x + 3$	+	+		0	-	-	0	+	+	

x	$-\infty$			1			3			∞
$-x^2 + 4x - 3$	-	-		0	+	+	0	-	-	

x	$-\infty$			2				∞
$x^2 - 4x + 4$	+	+	+	0	+	+	+	

x	$-\infty$			∞
$x^2 + x + 1$	+	+	+	

METODE DE NUMARARE

Mulțimi finite ordonate (mulțimi în care contează ordinea scrierii elementelor).

Definiția *factorialului unui număr natural* $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, $0! = 1$; proprietate $n! = n \cdot (n-1)!$

Permutări – numărul de mulțimi ordonate cu n elemente, $n \in \mathbb{N}^*$, care se obțin prin ordonarea unei mulțimi finite cu n elemente; numărul permutărilor de n elemente, $n \in \mathbb{N}^*$, este $P_n = n!$; cazuri particulare $P_1 = 1! = 1, P_2 = 2! = 1 \cdot 2 = 2, P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Aranjamente – numărul submulțimilor ordonate cu câte k elemente care se pot forma cu elementele unei mulțimi finite cu n elemente, $n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}, 0 \le k \le n$; numărul tuturor aranjamentelor de n elemente luate câte k este $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$; cazuri particulare $A_n^n = n! = P_n$, $A_n^0 = 1$.

Combinări – numărul submulțimilor cu câte k elemente care se pot forma cu elementele unei mulțimi finite cu n elemente, $n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}, 0 \le k \le n$; numărul tuturor combinărilor de n elemente luate câte k este $C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$; cazuri particulare $C_n^0 = C_n^n = 1$; $C_n^1 = C_n^{n-1} = n, n \ge 1$; $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}, n \ge 2$.

Proprietăți: *formula combinărilor complementare*: $C_n^k = C_n^{n-k}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}, 0 \le k \le n$; numărul tuturor submulțimilor unei mulțimi cu n elemente este dat de formula $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

Probabilitatea unui eveniment $P = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$.

NUMERE COMPLEXE

Forma algebrică a unui număr complex este $z = a + ib$, $a,b \in \mathbb{R}$. $\mathrm{Re}z=a$, $\mathrm{Im}z=b$, $i^2= -1$

Conjugatul lui z este $\bar{z} = a - ib$.

Modulul numărului complex z este $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

`

VECTORI IN PLAN

Segment orientat, vectori, caracterizare: *direcție, sens, modul.*

Notații: $\overline{AB}$ vector cu originea A și extremitatea B; direcția vectorului este dată de dreapta AB, sensul este determinat de parcurgerea dreptei dinspre A spre B, modulul vectorului este egal cu lungimea segmentului (AB); $\vec{v}$ vector liber (reprezentant al unei clase de vectori); modulul vectorului $\vec{v}$ se notează prin $|\vec{v}|$

Vectorul nul: $\vec{0}$ sau $\overline{AA}$.

Vectori egali: vectori care au aceeași direcție, același sens și același modul; $\overline{AB} = \overline{AC} \Leftrightarrow B = C$.

Vectori coliniari: vectori care au aceeași direcție.

Operații cu vectori:

1) *adunarea*: notație $\vec{u} + \vec{v}$, rezultatul este un vector ce poate fi determinat prin aplicarea regulii triunghiului sau a regulii paralelogramului; proprietăți: comutativitate, asociativitate, element neutru (vectorul nul $\vec{0}$), *vectori opuși* (opusul vectorului $\vec{v}$ este vectorul $-\vec{v}$, care are aceeași direcție, sens opus și același modul)

→ $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$, regula lui Chasles

→ $\overline{AB} + \overline{CA} = \overline{CA} + \overline{AB} = \overline{CB}$

→ opusul vectorului $\overline{AB}$ este vectorul $\overline{BA}$; $\overline{AB} + \overline{BA} = \vec{0}$

→ $\overline{AB} - \overline{CD} = \overline{AB} + \left(-\overline{CD}\right) = \overline{AB} + \overline{DC}$

→ oricare ar fi punctul M avem $\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{MB}$.

2) *înmulțirea cu scalari*: notație $\alpha \cdot \vec{v}$, $\alpha \in \mathbb{R}$; rezultatul înmulțirii unui vector cu un scalar este tot un vector; astfel dacă $\alpha \cdot \vec{v} = \vec{w}$ și $\alpha \neq 0$, atunci avem următoarele proprietăți: $\vec{v}$ și $\vec{w}$ au aceeași direcție, au același sens dacă $\alpha > 0$, au sensuri opuse dacă $\alpha < 0$ și relația dintre modulele celor doi vectori este $|\vec{w}| = |\alpha| \cdot |\vec{v}|$; dacă $\alpha = 1$, cei doi vectori sunt egali; dacă $\alpha = -1$, cei doi vectori sunt vectori opuși.

TRIGONOMETRIE

x	x	sinx	cosx	tgx	ctgx
$0°$	0	0	1	0	-
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	1	0	-	0
$180°$	π	0	-1	0	-

Formula de transformare grade – radiani:

$180^0 = \pi\, radiani$

$360^0 = 2\pi\ radiani$

$Formula\ \ fundamentala\ a\ trigonometriei: \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin(90 - x) = \cos x,\ \cos(90 - x) = \sin x$

$Pentru\ \ x \in (90,180):\ \sin(180 - x) = \sin x,\ \cos(180 - x) = -\cos x$

Triunghiul dreptunghic:

- *teorema lui Pitagora*: suma pătratelor lungimilor catetelor este egală cu pătratul lungimii ipotenuzei; cu notațiile: a lungimea ipotenuzei, b, c - lungimile catetelor, avem relația $a^2 = b^2 + c^2$
- *înălțimea* corespunzătoare ipotenuzei, h, se poate determina din formula $h = \frac{b \cdot c}{a}$ sau din teorema înălțimii
- *aria* este dată de formula $S = \frac{b \cdot c}{2}$

Formule pentru aria triunghiului:

a=BC, b=AC, c=AB

- aria triunghiului- formula lui Heron: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, unde $p = \frac{a+b+c}{2}$ este semiperimetrul triunghiului
- înălțimile, prin egalarea valorii obținute prin aplicarea formulei lui Heron cu expresia ariei folosind formulele $S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$;
- $\sin A, \sin B$ și $\sin C$, din egalarea ariei cu expresia $S = \frac{ab\sin C}{2} = \frac{ac\sin B}{2} = \frac{bc\sin A}{2}$;
- raza cercului circumscris triunghiului, R, din egalarea ariei cu expresia $S = \frac{abc}{4R}$;
- raza cercului înscris în triunghi, r, din egalarea ariei cu expresia $S = p \cdot r$;

Calcul de arii (clasa a XI-a): dacă $A_1A_2A_3$ este un triunghi cu vârfurile de coordonate $A_i(x_i, y_i)$, $i \in \{1,2,3\}$, atunci $\mathcal{A}_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2} \cdot |\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$.

Teorema cosinusului:

$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ şi $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$;

Teorema sinusurilor:

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

ELEMENTE DE GEOMETRIE LINIARA

Distanța dintre două puncte în plan: pentru $A(x_A,y_A), B(x_B,y_B)$, avem $AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$; *coordonatele mijlocului* $M(x_M,y_M)$ al *segmentului* (AB): $x_M=\frac{x_A+x_B}{2}$, $y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$; *coordonatele centrului de greutate* $G(x_G,y_G)$ al triunghiului ABC: $x_G=\frac{x_A+x_B+x_c}{3}$; $y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}$.

Ecuația dreptei în plan determinată de un punct $A(x_A,y_A)$ și de o direcție dată (panta m) $d: y-y_A=m(x-x_A)$.

Ecuația dreptei determinată de două puncte distincte $A(x_A,y_A), B(x_B,y_B)$: $\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}$, sau prin exprimarea (clasa a XI-a) cu ajutorul determinanților: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix}=0$; *panta dreptei* AB: $m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ (pentru cazul $x_A\neq x_B$).

Ecuația generală carteziană implicită: $d: ax+by+c=0$, $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a^2+b^2\neq 0$.

Ecuația generală carteziană explicită: $y=mx+n$, $m,n\in\mathbb{R}$.

Calcul de distanțe: distanța de la un punct $A(x_A,y_A)$ la dreapta d de ecuație $ax+by+c=0$ $\operatorname{dist}(A,d)=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Condiție de coliniaritate a trei puncte (clasa a XI-a): dacă $\Delta=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$, atunci punctele A_1, A_2, A_3 sunt coliniare.

Condiții de paralelism:

→ *pentru două drepte oblice* $d_1: a_1x+b_1y+c_1=0$, $d_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ date prin *ecuații generale implicite*, avem:

- $d_1=d_2$ dacă și numai dacă coeficienții sunt proporționali, adică $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$
- $d_1 \parallel d_2$ dacă și numai dacă $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$;

→ *pentru două drepte oblice* $d_1: y=m_1x+n_1$, $d_2: y=m_2x+n_2$ date prin *ecuații generale explicite*, avem:

- $d_1=d_2$ dacă și numai dacă avem îndeplinită condițiile $m_1=m_2$ (aceeași pantă) și $n_1=n_2$ (aceeași ordonată la origine)
- $d_1 \parallel d_2$ dacă și numai dacă $m_1=m_2$ (aceeași pantă).