ANALIZA MATEMATICA

ASIMPTOTE

asimptotă verticală dreapta $x = a \in \mathbb{R}$, dacă au sens şi există:

i) $l_s(a) = \lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = \pm\infty$

ii) $l_d(a) = \lim\limits_{x \searrow a} f(x) = \pm\infty$

asimptotă orizontală, dacă $+\infty$ sau/și $-\infty$ sunt puncte de acumulare ale domeniului de definiție al funcției:

i) *la* $+\infty$, dreapta $y = b$, dacă $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$

ii) *la* $-\infty$, dreapta $y = b$, dacă $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$

asimptotă oblică, dacă $+\infty$ sau/și $-\infty$ sunt puncte de acumulare ale domeniului de definiție al funcției:

i) *la* $+\infty$, dreapta $y = mx + n$, dacă $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}^*$ şi $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - mx \right) = n \in \mathbb{R}$

ii) *la* $-\infty$, dreapta $y = mx + n$, dacă $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}^*$ şi $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) - mx \right) = n \in \mathbb{R}$.

FUNCTII CONTINUE

Functia f e continua in punctul x_0 daca $l_s(x_0) = l_s(x_0) = f(x_0)$.

Derivatele funcţiilor elementare

1. $c' = 0$
2. $x' = 1$
3. $(x^n)' = nx^{n-1}$
4. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
5. $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
6. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
7. $(e^x)' = e^x$
8. $(a^x)' = a^x \, lna$
9. $(lnx)' = \frac{1}{x}$
10. $(log_a \, x)' = \frac{1}{x \, lna}$
11. $(sin \, x)' = cos \, x$
12. $(cos \, x)' = -\,sin \, x$

13. $(tg\ x)' = \frac{1}{cos^2 x} = 1 + tg^2 x$

14. $(ctg\ x)' = -\frac{1}{sin^2 x}$

15. $(arcsin\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

16. $(arccos\, x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

17. $(arctg\ x)' = \frac{1}{x^2+1}$

18. $(arcctg\ x)' = -\frac{1}{x^2+1}$

19. $\left(\sqrt{x^2+a^2}\right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$

20. $\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$

21. $\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)' = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

Derivata funcției f în x_0 este $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

Reguli de derivare

$(f \pm g)' = f' \pm g'$

$(cf)' = cf'$, c = *constantă/număr*

$(fg)' = f'g + fg'$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$

Ecuația tangentei la G_f în x_0 este $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Regula lui L'Hospital: se aplica pentru eliminarea nedeterminarilor $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$: $\lim \frac{f}{g} = \lim \frac{f'}{g'}$

Monotonia unei functii

$Daca\ f'(x) > 0, x \in I\ atunci\ \ f\ \ e\ crescaatoare\ \ pe\ I.$

$Daca\ f'(x) < 0, x \in I\ atunci\ \ f\ \ e\ descrescaatoare\ \ pe\ I.$

Functii convex/concave

Daca $f''(x) > 0, x \in I$ *atunci* f *e convexa pe* I.
Daca $f''(x) < 0, x \in I$ *atunci* f *e concava pe* I.
Daca $f''(x) = 0, x \in I$ *atunci* f *e liniara pe* I.

PRIMITIVE

Primitivă/primitive, definiție: se consideră o funcție $f : I \to \mathbb{R}$, unde $I \subseteq \mathbb{R}$ este un interval, funcția $F : I \to \mathbb{R}$ se numește primitiva funcției f dacă:

a) F este derivabilă pe I

b) $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$.

Dacă există o primitivă F a funcției f, atunci f admite primitive pe intervalul I și pentru orice primitivă $G : I \to \mathbb{R}$ a lui f, există o funcție constantă $c : I \to \mathbb{R}, c(x) = c$ astfel încât $G = F + c$.

În acest caz, mulțimea tuturor primitivelor funcției f este $\{F + \mathcal{C} / \mathcal{C}$ este mulțimea constantelor$\}$; mulțimea tuturor primitivelor funcției f se numește *integrala nedefinită* a funcției f și se notează $\int f(x)\,dx = F(x) + \mathcal{C}$.

Orice funcție continuă f admite primitive (rezultat care va fi utilizat pentru a argumenta faptul că o funcție admite primitive, neimplicând și determinarea unei primitive sau a integralei nedefinite).

Proprietate $\int f'(x)dx = f(x) + \mathcal{C}$.

Integrala definită formula Leibniz – Newton: dacă $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, integrala definită a funcției f pe intervalul $[a,b]$ este numărul real $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$.

Integrala definită formula Leibniz – Newton: dacă $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, integrala definită a funcției f pe intervalul $[a,b]$ este numărul real $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$.

ii) *Metoda schimbării de variabilă*:

Se consideră intervalul $I \subseteq \mathbb{R}$ și funcțiile $u : [a,b] \to I$ și $f : I \to \mathbb{R}$ cu următoarele proprietăți:

1. f continuă pe I
2. u derivabilă pe $[a,b]$ cu derivata u' continuă pe $[a,b]$.

Aria unei suprafețe plane:

i) Fie funcția $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă. Atunci aria S a suprafeței cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuație $x=a$ și $x=b$ este dată de relația $S=\int_a^b |f(x)|\,dx$.

a

Volumul unui corp de rotație:

Fie funcția $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă. Atunci volumul V al corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției f este dat de relația $V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$.

Nr.	**Integrale nedefinite**
1	$\int dx = x + C$
2	$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$
3	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
4	$\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$
5	$\int e^x\,dx = e^x + C$
6	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
7	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$
8	$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$
9	$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{arctg} x + C$
10	$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$

11	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right\| + C$
12	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C$
13	$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \arcsin x + C$
14	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$

15	$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
16	$\int \cos x \, dx = \sin x + C$
17	$\int \mathrm{tg} x dx = -\ln\|\cos x\| + C$
18	$\int \mathrm{ctg} x dx = \ln\|\sin x\| + C$
19	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg}\, x + C$
20	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{ctg}\, x + C$
21	$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \sqrt{x^2 - a^2} + C$
22	$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \sqrt{x^2 + a^2} + C$
23	$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\sqrt{a^2 - x^2} + C$