

BACALAUREAT 2021, VARIANTA 15

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p 1. Arătați că  $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} : 0,5\right) \cdot \frac{12}{13} = 1$ .
- 5p 2. Arătați că  $2(x_1 + x_2) - x_1 x_2 = 4$ , unde  $x_1$  și  $x_2$  sunt soluțiile ecuației  $x^2 - 7x + 10 = 0$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{5x+1} = 6$ .
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 11.
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(6,0)$  și  $B(0,8)$ . Determinați lungimea înălțimii din vârful  $O$  al triunghiului  $AOB$ .
- 5p 6. Calculați lungimea laturii  $AB$  a triunghiului  $ABC$  dreptunghic în  $A$ , știind că  $BC = 5\sqrt{2}$  și  $m(\sphericalangle B) = 45^\circ$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  și  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- 5p a) Arătați că  $\det A = 1$ .
- 5p b) Arătați că  $2A - A \cdot A = I_2$ .
- 5p c) Determinați numerele reale  $x$ ,  $y$  și  $z$ , pentru care  $A \cdot \begin{pmatrix} x-2 & y \\ z+1 & 1 \end{pmatrix} - I_2 = O_2$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x \circ y = xy + x^2 + y^2 - 1$ .
- 5p a) Arătați că  $1 \circ (0 \circ 2) = 12$ .
- 5p b) Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $x \circ (-x) = 3$ .
- 5p c) Determinați perechile  $(m, n)$  de numere naturale pentru care  $m \circ n = -mn$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Calculați  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$ .
- 5p c) Demonstrați că funcția  $f$  este convexă pe  $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 + x^2 + 3x$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_{-1}^1 (f(x) - x^2 - 3x) dx = 0$ .

**5p** b) Arătați că  $\int_0^1 (f(x) - x^3 - x^2) e^x dx = 3$ .

**5p** c) Se consideră funcția  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , primitiva funcției  $f$  pentru care  $F(0) = 1$ . Demonstrați că

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{F^2(x)} dx = \frac{25}{37}.$$