

**Matematică  $M_{tehnologic}$**

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p 1. Arătați că  $\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{2}{3} + 1\right) - \left(2 - \frac{4}{3}\right) = 0$ .
- 5p 2. Determinați numărul real  $m$  pentru care graficul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - mx + 3$  conține punctul  $A(2, 5)$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{x+4} - 2 = x$ .
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele egale.
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(-1, 1)$  și  $B(2, -2)$ . Determinați numărul real  $a$ , știind că punctele  $A$ ,  $B$  și  $C(4, a)$  sunt coliniare.
- 5p 6. Diagonala pătratului  $MNPQ$  are lungimea de  $6\sqrt{2}$ . Calculați perimetrul acestui pătrat.

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .
- 5p a) Arătați că  $\det(A - B) = 1$ .
- 5p b) Demonstrați că matricea  $C = A \cdot A + B \cdot B$  nu este inversabilă.
- 5p c) Determinați numerele reale  $x$  și  $y$  pentru care  $A \cdot X = X \cdot B$ , unde  $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & y \end{pmatrix}$ .
2. Pe mulțimea  $M = (0, +\infty)$  se definește legea de compoziție asociativă  $x * y = \frac{xy + 1}{x + y}$ .
- 5p a) Arătați că  $1 * 1 = 1$ .
- 5p b) Determinați numărul  $x \in M$  pentru care  $x * 2 = \frac{3}{2}$ .
- 5p c) Calculați  $\lg 2 * \lg 4 * \lg 6 * \lg 8 * \lg 10$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x^{2020} + 1, & x \in (0, 1] \\ \frac{x+1}{x}, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$ .
- 5p a) Arătați că funcția  $f$  este continuă în  $x_0 = 1$ .
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p c) Demonstrați că funcția  $f'$  este crescătoare pe  $(1, +\infty)$ .
2. Se consideră funcțiile  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{e^x}{x}$  și  $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = e^x \ln x$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_1^2 x f(x) dx = e(e-1)$ .

**5p** b) Calculați  $\int_e^{e^2} \frac{g(x)}{xe^x} dx$ .

**5p** c) Demonstrați că  $\int_1^e (f(x) + g(x)) dx = e^e$ .